

# Uvod u kalkulus mnogostrukosti i njegove primjene

Ismar Volić  
Wellesley College

Matematički Institut SANU  
17. mart 2015.

1. Ideja kalkulusa funktora
2. Kalkulus mnogostrukosti
3. Primjena na prostore ulaganja
4. Taylorova kula za prostore čvorova
5. Invarijante konačnog tipa
6. Integrali prostora konfiguracija

# 1. Ideja kalkulusa funktora

Kalkulus funktora je teorija koja se bavi aproksimacijom funktora u algebri i topologiji na sličan način na koji Taylorov niz to radi sa običnim analitičkim funkcijama. Generalno, ako imamo funktor

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ova teorija proizvodi "Taylorovu kulu" funktora i morfizama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & F(-) & & & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & & & \\ T_0F(-) & \longleftarrow \dots \longleftarrow & T_{k-1}F(-) & \longleftarrow & T_kF(-) & \longleftarrow \dots \longleftarrow & T_\infty F(-) \end{array}$$

- $T_k F$  je  $k$ -ti Taylorov polinom (stepen) od  $F$ ;
- $T_\infty F$  is the inverzni limes kule, dakle "Taylorov niz" od  $F$ .

Zavisno of  $F$ , ova kula je *konvergentna* što znači da postoji ekvivalencija, za sve  $X \in \mathcal{C}$ ,

$$F(X) \simeq T_\infty F(X).$$

(Riječ "ekvivalencija" zavisi od konteksta.)

# 1. Ideja kalkulusa funktora

Trenutno postoje tri verzije kalkulusa funktora:

- Homotopski kalkulus
- Ortogonalni kalkulus
- Kalkulus mnogostrukosti

Svaki proučava različite vrste funktora:

- Homotopski:  $X \mapsto \Sigma^\infty X, \Omega^\infty \Sigma^\infty X, X$ ;
- Ortogonalni:  $V \mapsto BO(V), BU(V), S^V, \Omega^V S^V$ ;
- Mnogostrukosti:  $M \mapsto \text{Map}(M, N), \text{Imm}(M, N), \text{Emb}(M, N)$

Analogije sa Taylorovim nizom su najjasnije u homotopskom kalkulusu gdje je, na primjer,  $k$ -ti polinom

$$\left( \partial_k F(*) \wedge X^{\wedge k} \right)_{h\Sigma_k}$$

što odgovara

$$\left( f^{(k)}(0) \cdot x^k \right) / k!$$

## 2. Kalkulus mnogostrukosti

Nas interesuje kalkulus mnogostrukosti:

Neka  $\text{Top}$  bude kategorija topoloških prostora i neka  $M, N$  budu glatke mnogostrukosti.

$\mathcal{O}(M)$  = kategorija otvorenih podskupova od  $M$   
sa inkluzijama kao morfizmima.

Kalkulus mnogostrukosti proučava funktore

$$F: \mathcal{O}(M)^{op} \longrightarrow \text{Top}$$

Za svaki takav funktor, kalkulus mnogostrukosti daje Taylorovu kulu funktora/prostora  $T_k F$  i fibracija među njima.

Polinomi  $T_k F$  Taylorove kule su generalno definisani na slijedeći način:

## 2. Kalkulus mnogostrukosti

Neka je  $\mathcal{O}_k(-)$  podkategorija  $\mathcal{O}(-)$  koja se sastoji od otvorenih podskupova koji su difeomorfni otvorenim razdvojenim loptama, najviše njih  $k$ .

Onda, za  $U \subset \mathcal{O}(M)$ ,  $k$ -ti Taylorov polinom je

$$T_k F(U) = \operatorname{holim}_{V \in \mathcal{O}_k(U)} F(V).$$

Ovaj homotopski limes na neki način rekonstruira  $F(U)$  od informacija o sistemima otvorenih lopti u  $U$  (Kan ekstenzija).

U povoljnim okolnostima, preslikavanje  $F(-) \rightarrow T_k F(-)$  indukuje izomorfizme na grupama homotopije u rasponu koji raste sa  $k$ , tako da imamo ekvivalenciju

$$F(-) \xrightarrow{\simeq} T_\infty F(-).$$

(Obično se tada funktor evaluira na  $M$ , znači interesuje nas ekvivalencija  $F(M) \xrightarrow{\simeq} T_\infty F(M)$ .)

### 3. Primjena na prostore ulaganja

Glavni primjer funktora na koje se kalkulus mnogostrukosti primjenjuje su prostori ulaganja.

#### Definicija

Neka su  $M$  i  $N$  glatke mnogostrukosti. *Ulaganje*  $M$  u  $N$  je injektivno preslikavanje  $f: M \hookrightarrow N$  čiji izvod je injektivan i koje je homeomorfizam na svoju sliku.

Ako je  $M$  kompaktan, onda je ulaganje injektivno preslikavanje sa injektivnim izvodom.

Skup svih ulaganja  $M$  u  $N$  se može topologizirati tako da dobijemo *prostor ulaganja*  $M$  u  $N$ ,  $\text{Emb}(M, N)$ .

Zanima nas

$$\pi_*(\text{Emb}(M, N)), \quad H_*(\text{Emb}(M, N)), \quad H^*(\text{Emb}(M, N)).$$

Čak je i  $H_0(\text{Emb}(M, N))$ , skup *klasa izotopije* ulaganja  $M$  u  $N$ , obično vrlo komplikovan.

### 3. Primjena na prostore ulaganja

Protor ulaganja  $\text{Emb}(M, N)$  se može smatrati i funktorom otvorenih podskupova mnogostrukosti  $M$ :

$$\text{Emb}(-, N): \mathcal{O}(M)^{\text{op}} \longrightarrow \text{Top}$$

Naime, za svaku inkluziju

$$O_1 \hookrightarrow O_2$$

otvorenih podskupova, imamo restrikciju

$$\text{Emb}(O_2, N) \rightarrow \text{Emb}(O_1, N).$$

Ovo vrijedi i za prostore *imerzija*  $\text{Imm}(M, N)$  (glatka preslikavanja sa injektivnim izvodom) i  $\text{Map}(M, N)$  (glatka preslikavanja).



### 3. Primjena na prostore ulaganja

#### Teorema (Goodwillie-Klein-Weiss)

Neka  $m = \dim(M)$  i  $n = \dim(N)$ . Za  $n - m - 2 > 0$  i  $U \in \mathcal{O}(M)$ , preslikavanje

$$\text{Emb}(U, N) \longrightarrow T_k \text{Emb}(U, N)$$

je  $(k(n - m - 2) + 1 - m)$ -povezano (indukuje izomorfizme na grupama homotopije do tog broja). S obzirom da ovaj broj raste sa  $k$ , imamo ekvivalenciju

$$\text{Emb}(U, N) \xrightarrow{\simeq} T_\infty \text{Emb}(U, N).$$

Obično se ovaj rezultat koristi u slučaju  $U = M$ .

Sličan rezultat konvergencije vrijedi za  $H_*(\text{Emb}(M, N))$  i  $H^*(\text{Emb}(M, N))$ , ali tada je uslov da  $n - 4m + 1 > 0$ .

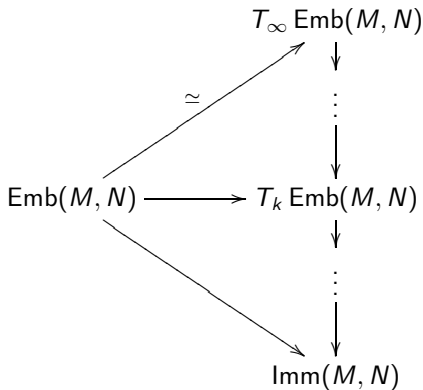
Kada je  $M$  1-dimenzionalan,  $N$  mora biti bar 4-dimenzionalan u obje verzije konvergentnosti.

### 3. Primjena na prostore ulaganja

Nije teško pokazati (Smale-Hirsch) da

$$T_1 \text{Emb}(M, N) \simeq \text{Imm}(M, N),$$

tako da Taylorova kula za  $\text{Emb}(M, N)$  klasifikuje opstrukcije za postojanje homotopije koja počinje sa imerzijom a završava ulaganjem, u kodimenziji  $> 2$ .



### 3. Primjena na prostore ulaganja

Taylorova kula takodje sadrži neke klasične rezultate iz ove oblasti.

Na primjer, početak kule, sa povezanostima preslikavanja, je

$$\begin{array}{ccc} & & T_2 \text{Emb}(M, N) \\ & \nearrow^{2n-3m-3} & \downarrow \\ \text{Emb}(M, N) & \xrightarrow{n-2m-1} & \text{Imm}(M, N) \end{array}$$

Ako je  $n - 2m - 1 \geq 0$ , onda je  $\text{Emb}(M, N) \rightarrow \text{Imm}(M, N)$  surjektivno na  $\pi_0$ , što znači da je svaka imerzija homotopna ulaganju.

Ovo je *Whitney's Easy Embedding Theorem*.

### 3. Primjena na prostore ulaganja

$$\text{Emb}(M, N) \xrightarrow{2n-3m-3} T_2 \text{Emb}(M, N) \simeq \text{holim} \left( \begin{array}{c} \text{Map}(M, N) \\ \downarrow \\ \text{Map}^{\Sigma_2}(M \times M, N \times N) \\ \uparrow \\ \text{ivmap}^{\Sigma_2}(M \times M, N \times N) \end{array} \right)$$

Ako je  $2n - 3m - 3 > 0$ , onda je ovo prelikavanje surjektivno na  $\pi_0$ , i dobijemo *Haefliger/Dax Teorem*.

Ako je  $N = \mathbb{R}^n$ , onda  $\text{Map}(M, N) \simeq \text{Map}^{\Sigma_2}(M \times M, N \times N) \simeq *$ , i dobijemo

#### Teorema (Dax)

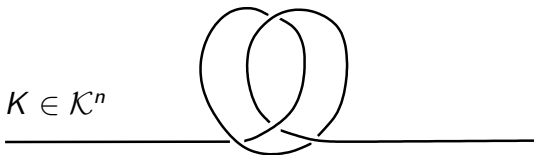
$$\text{Emb}(M, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{ivmap}^{\Sigma_2}(M \times M, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

je  $(2n - 3m - 3)$ -povezano.

Taylorova kula takođe vidi Haefligerovu "double point obstruction" za homotopiranje imerzije u ulaganje u metastabilnom rasponu.

## 4. Taylorova kula za prostore čvorova

$\mathcal{K}^n = \{\text{ulaganja } K: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ linearna van nekog kompaktnog skupa}\}$   
 $= \textit{prostor dugih čvorova}$



Klasična teorija čvorova se bavi

- $H_0(\mathcal{K}^3)$ , koja je generisana (nad  $\mathbb{R}$ , recimo) tipovima čvorova, dakle klasama izotopije čvorova; i
- $H^0(\mathcal{K}^3)$ , skup invarijanti čvorova ili lokalno konstantne (sa  $\mathbb{R}$ -vrijednostima) funkcijama na  $\mathcal{K}^3$ , dakle funkcijama koje dodjeljuju istu vrijednost izotopnim čvorovima.

Ali i viša (ko)homologija i homotopija su takođe interesantni, čak i za  $n > 3$  (iako tada nema učvoravanja; u tom slučaju su  $H_0$  i  $H^0$  trivijalni).

Goodwillie-Klein-Weiss rezultat vrijedi za  $n \geq 4$ , ali se Taylorova kula može definisati i za  $n = 3$ .

## 4. Taylorova kula za prostore čvorova

Konstrukcija  $T_k \mathcal{K}^n$ : Neka  $I_1, \dots, I_k$  budu razdvojeni intervali u  $\mathbb{R}$  i

$$\emptyset \neq S \subseteq \{1, \dots, k\}.$$

Onda imamo prostore

$$\mathcal{K}_S^n = \text{Emb}(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in S} I_i, \mathbb{R}^n) = \text{prostor "čvorova sa rupama"}$$

### Primjer



element prostora  $\mathcal{K}_{\{1,2,3,4\}}^n$

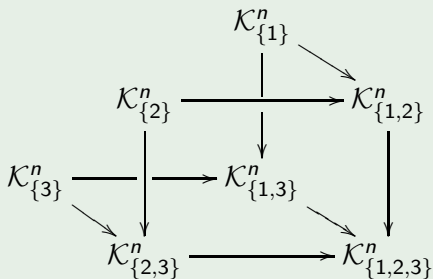
Ovi prostori nisu sami od sebe interesantni; štaviše, povezani su čak i za  $n = 3$ . Ali...

## 4. Taylorova kula za prostore čvorova

Imamo restrikcije  $\mathcal{K}_S^n \rightarrow \mathcal{K}_{S \cup \{i\}}^n$  date “pravljjenjem još jedne rupe”.  
Onda ovi prostori i preslikavanja formiraju dijagram čvorova sa rupama.

### Primjer

Kada je  $k = 3$ , dobijemo



## 4. Taylorova kula za prostore čvorova

### Definicija

$k$ -ti stepen Taylorove kule za  $\mathcal{K}^n$ ,  $n \geq 3$ , je homotopski limes (povlačenje) dijagrama čvorova sa rupama:

$$T_k \mathcal{K}^n = \operatorname{holim}_{\emptyset \neq S \subseteq \{1, \dots, k\}} \mathcal{K}_S^n.$$

*Homotopski limes* dijagrama je kao limes, naime podprostor proizvoda svih prostora u dijagramu koji se sastoji od kolekcija tačaka kompatibilnih sa preslikavanjima u dijagramu, ali “udebljan” tako da je homotopski invarijantan.

$T_k \mathcal{K}^n$  je kao interpolacijski polinom koji pokušava da rekonstruiše čvor od  $k$  tačaka na njemu.



## 4. Taylorova kula za prostore čvorova

Imamo preslikavanje

$$\mathcal{K}^n \longrightarrow T_k \mathcal{K}^n$$

dato “bušenjem rupa u čvoru” (izotopije u homotopskom limesu su konstantne).

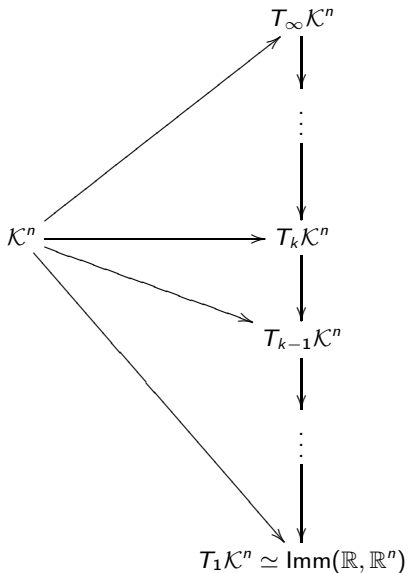
Takodje imamo preslikavanja, za sve  $k \geq 1$ ,

$$T_k \mathcal{K}^n \longrightarrow T_{k-1} \mathcal{K}^n,$$

jer je dijagram koji definiše  $T_{k-1} \mathcal{K}^n$  poddijagram onoga koji definiše  $T_k \mathcal{K}^n$ ; tako automatski imamo da se homotopski limes većeg dijagrama preslikava na homotopski limes manjeg.

Svi ovi prostori i preslikavanja nam zajedno daju Taylorovu kulu za  $\mathcal{K}^n$ ,  $n \geq 3$ :

## 4. Taylorova kula za prostore čvorova



Goodwillie-Klein-Weiss Teorem kaže da je ova kula konvergentna na (ko)homologiji i homotopiji za  $n \geq 4$ .

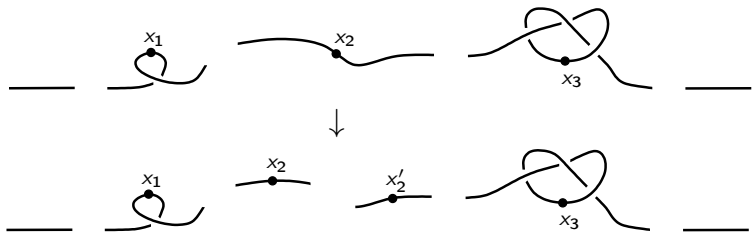
## 4. Taylorova kula za prostore čvorova

$$\begin{aligned}\text{Conf}(p, \mathbb{R}^n) &= \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^n)^p : x_i \neq x_j \text{ za } i \neq j\} \\ &= \text{prostor konfiguracija } p \text{ ta\u010daka u } \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Retrakcija dijelova probu\u0161enog \u010dvara daje

$$\mathcal{K}_S^n \simeq \text{Conf}(|S| - 1, \mathbb{R}^n).$$

Restrikcijska preslikavanja "dodaju ta\u010dku":



Da bi ovo preciznije definisali, treba nam kompaktifikacija.

## 4. Taylorova kula za prostore čvorova

Ako je  $M$  mnogostrukost u  $\mathbb{R}^n$ , onda imamo preslikavanja, za  $1 \leq i < j < k \leq p$ ,

$$v_{ij}: \text{Conf}(p, M) \longrightarrow S^{n-1}$$
$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|}$$

$$a_{ijk}: \text{Conf}(p, M) \longrightarrow [0, \infty]$$
$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \frac{|x_i - x_j|}{|x_i - x_k|}$$

Ova preslikavanja se mogu koristiti za mjerenje pravaca i relativnih brzina sudaranja tačaka u konfiguraciji. Onda imamo

$$\gamma: \text{Conf}(p, M) \longrightarrow M^p \times (S^{n-1})^{\binom{p}{2}} \times [0, \infty]^{\binom{p}{3}}$$
$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto (x_1, \dots, x_p, v_{12}, \dots, v_{(p-1)p}, a_{123}, \dots, a_{(p-2)(p-1)p})$$

## 4. Taylorova kula za prostore čvorova

### Definicija

*Fulton-MacPherson kompaktifikacija*  $\text{Conf}[p, M]$  konfiguracijskog prostora  $\text{Conf}(p, M)$  je zatvaranje slike  $\gamma$ :

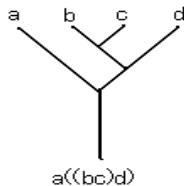
$$\text{Conf}[p, M] = \overline{\gamma(\text{Conf}(p, M))}.$$

Neke od svojstava ovog prostora su

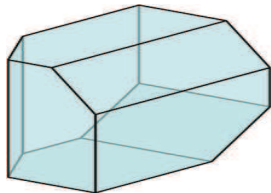
- $\text{Conf}[p, M]$  je kompaktan ako je  $M$  kompaktan;
- $\text{Conf}[p, M]$  je homotopski ekvivalentan  $\text{Conf}(p, M)$ ;
- $\text{Conf}[p, M]$  je mnogostrukost sa uglovima;
- Granicu  $\text{Conf}[p, M]$  karakterizuju tačke koje se sudaraju ali njihove putanje i relativne brzine sudaranja su bitne;
- Lica kodimenzije  $k$  su karakterisana sudaranjem tačaka u  $k$  stadija;

## 4. Taylorova kula za prostore čvorova

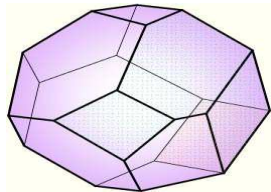
- Stratifikacija granice se može predstaviti "stablima" koje formiraju operadu:



- Ova konstrukcija je već poznata u drugim kontekstima: Na primjer, kompaktifikacija prostora tačaka u intervalu daje (*Stasheff*) asociedron:



- Kompaktifikacija prostora tačaka u krugu  $S^1$  daje cikloedron:



## 4. Taylorova kula za prostore čvorova

Vratimo se Taylorovoj kuli čvorova.

Sada imamo preslikavanja

$$\text{Conf}[\rho, \mathbb{R}^n] \longrightarrow \text{Conf}[\rho + 1, \mathbb{R}^n]$$

koja "ponavljaju" tačke, tako da se Taylorova kula može redefinisati. Na primjer,

$$T_3\mathcal{K}^n = \text{holim} \left( \begin{array}{ccccc} & & & \text{Conf}[1, \mathbb{R}^n] & \\ & & & \downarrow & \nearrow \\ & \text{Conf}[1, \mathbb{R}^n] & \xrightarrow{\quad} & \text{Conf}[2, \mathbb{R}^n] & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{Conf}[1, \mathbb{R}^n] & \xrightarrow{\quad} & \text{Conf}[2, \mathbb{R}^n] & \xrightarrow{\quad} & \text{Conf}[3, \mathbb{R}^n] \\ & \searrow & & \searrow & \\ & \text{Conf}[2, \mathbb{R}^n] & \xrightarrow{\quad} & \text{Conf}[3, \mathbb{R}^n] & \end{array} \right)$$

Da vidimo šta nam Taylorova kula može reći o invarijantama klasičnih čvorova  $\mathcal{K}^3$ ...

## 5. Invarijante konačnog tipa

Ako je data invarijanta  $V \in H^0(\mathcal{K}^3)$ , ona se može proširiti na *singularne čvorove*, naime čvorove sa samoukrštanjima, putem *Vasiljevljeve skein relacije*

$$V(\text{X}) = V(\text{Y}) - V(\text{Z}).$$

Ako čvor ima  $n$  singularnosti, onda dobijemo  $2^n$  pravih čvorova (redosljed kojim “rastavimo” singularnosti nije bitan) na kojima možemo evaluirati  $V$ .

### Definition

Invarijanta  $V$  je *konačnog tipa*  $n$  ako je nula na svim čvorovima sa  $n + 1$  singularnosti.

### Primjeri

- Koeficijenti raznih polinomskih invarijanti (Jones, HOMFLY, itd.)
- Milnorove invarijante (za linkove)



## 5. Invarijante konačnog tipa

### Teorema (Kontsevich)

*Vektorski prostor invarijanti konačnog tipa je izomorfan vektorskom prostoru generisanom 3-valentnim dijagramima tetiva modulo STU relacije (poslije ćemo još reći o ovome).*

- Invarijante konačnog tipa su popularne jer su vezane za fiziku (Chern-Simons Teorija, Feynmanovi dijagrami), teoriju 3-višestrukosti, Lijeve algebre, itd.
- Pretpostavka je da su invarijante konačnog tipa *kompletan skup* invarijanti. Drugim riječima, pretpostavka je da za svaka dva čvora koji nisu izotopni postoji invarijanta konačnog tipa koja daje druge vrijednosti za ta dva čvora. One jesu kompletne za određene vrste linkova (homotopski dugi linkovi i pletenice), što znači da postoje šanse da su takođe kompletne i za čvorove i standardne linkove.

## 5. Invarijante konačnog tipa

### Teorema (V.)

*Invarijante Taylorove kula za  $\mathcal{K}^3$  su upravo invarijante konačnog tipa. Preciznije, za svaki  $k \geq 0$  postoji izomorfizam (sa  $\mathbb{R}$ -koeficijentima)*

$$H^0(T_{2k}\mathcal{K}^3) \cong \{\text{invarijante konačnog tipa } k\} \subset H^0(\mathcal{K}^3).$$

*(Takođe  $H^0(T_{2k}\mathcal{K}^3) \cong H^0(T_{2k+1}\mathcal{K}^3)$ .)*

Ova teorema stavlja invarijante konačnog tipa u kontekst algebarske topologije i kalkulusa funktora gdje je možda lakse dokazati njihovu kompletnost.

Glavni sastojak u dokazu: Bott-Taubes integrali prostora konfiguracija. Ostatak predavanja je o ovim integralima jer su interesantni i javljaju se na neočekivanim mjestima (teorija deformacija, formalnost operada, kohomologija prostora ulaganja).

## 6. Integrali prostora konfiguracija

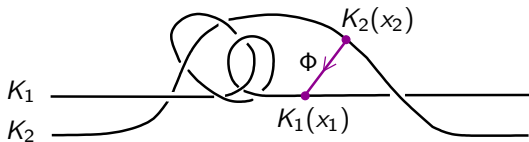
Srodno prostoru čvorova  $\mathcal{K}^3$  je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^3 &= \{\text{ulaganja } \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \text{ linearna van nekog kompaktnog skupa}\} \\ &= \textit{prostor dugih linkova sa dvije komponente}\end{aligned}$$

Imamo preslikavanja  $\Phi$  i  $\pi$ :

$$\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{L}_2^3 \xrightarrow{\textit{evaluacija}} \text{Conf}(2, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\textit{pravac}} S^2$$

$$(x_1, x_2, L = (K_1, K_2)) \longmapsto (K_1(x_1), K_2(x_2)) \longmapsto \frac{K_2(x_2) - K_1(x_1)}{|K_2(x_2) - K_1(x_1)|}$$



$$\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{L}_2^3 \xrightarrow{\textit{projekcija}} \mathcal{L}_2^3 \quad (\textit{trivijalni svežanj})$$

## 6. Integrali prostora konfiguracija

Dakle imamo dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{L}_2^3 & \xrightarrow{\Phi} & S^2 \\ \downarrow \pi & & \\ \mathcal{L}_2^3 & & \end{array}$$

koji na kolančanom kompleksu deRham diferencijalnih formi daje dijagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{L}_2^3) & \xleftarrow{\Phi^*} & \Omega^*(S^2) \\ \downarrow \pi_* & & \\ \Omega^{*-2}(\mathcal{L}_2^3) & & \end{array}$$

Ovdje je  $\Phi^*$  obično povlačenje a  $\pi_*$  je *integracija uz vlakno*, ili *pushforward(?)* – način da se napravi forma na baznom prostoru svežnja od forme na totalnom prostoru (čija je dimenzija umanjena dimenzijom vlakna).

## 6. Integrali prostora konfiguracija

Neka  $\text{sym}_{S^2} \in \Omega^2(S^2)$  bude standardna zapreminska 2-forma na  $S^2$ :

$$\text{sym}_{S^2} = \frac{x \, dydz - y \, dx dz + z \, dx dy}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Neka  $\alpha = \Phi^*(\text{sym}_{S^2})$ . Onda je *linking broj*(?)

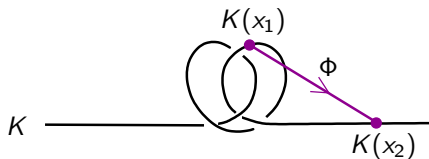
$$\text{Link}(K_1, K_2) = \pi_*(\alpha) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \alpha \in \Omega^0(\mathcal{L}_2^3)$$

Ovo je zatvorena forma, dakle element  $H^0(\mathcal{L}_2^3)$ , i tim invarijanta linkova od dvije komponente (ovo je bilo poznato Gausu).

Probajmo uraditi isto, ali za čvor umjesto linka.

## 6. Integrali prostora konfiguracija

Slika je



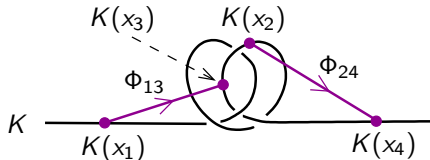
a dijagram koji ide uz nju je

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}(2, \mathbb{R}) \times \mathcal{K}^3 & \xrightarrow{\phi} & S^2 \\ \downarrow \pi & & \\ \mathcal{K}^3 & & \end{array}$$

Prvi problem je da integral sa domenom  $\text{Conf}(2, \mathbb{R})$  možda neće biti konvergentan jer je ovaj prostor otvoren, tako da koristimo kompaktifikaciju  $\text{Conf}[k, \mathbb{R}^n]$  od prije.

## 6. Integrali prostora konfiguracija

Ali čak i nakon kompaktifikacije, ovaj integral ne daje invarijantu (kontribucija granice  $\text{Conf}[2, \mathbb{R}^n]$  je netrivialna; više o ovome poslije). Slijedeći slučaj je četiri tačke i dva smjera:



Preslikavanja su

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}[4, \mathbb{R}] \times \mathcal{K}^3 & \xrightarrow{\Phi = \Phi_{13} \times \Phi_{24}} & S^2 \times S^2 \\ \downarrow \pi & & \\ \mathcal{K}^3 & & \end{array}$$

Neka je  $\alpha = \Phi^*(\text{sym}_{S^2}^2)$ . S obzirom da su i  $\alpha$  i  $\text{Conf}[4, \mathbb{R}]$  (vlakno od  $\pi$ ) 4-dimenzionalni, dobijemo 0-formu

$$I(\text{---}, K) = \pi_*(\alpha) = \int_{\text{Conf}[4, \mathbb{R}]} \alpha$$

## 6. Integrali prostora konfiguracija

Dakle  $I(\text{---}\overset{\frown}{\bullet}\overset{\frown}{\bullet}\overset{\frown}{\bullet}\text{---}, K)$  je 0-forma, znači element  $\Omega^0(\mathcal{K}^3)$ . Ali da li je zatvorena forma, ili element  $H^0(\mathcal{K}^3)$  – da li je invarijanta?

Želimo  $dI(\text{---}\overset{\frown}{\bullet}\overset{\frown}{\bullet}\overset{\frown}{\bullet}\text{---}, K) = 0$ . Stokesov Teorem kaže

$$\begin{aligned}dI(\text{---}\overset{\frown}{\bullet}\overset{\frown}{\bullet}\overset{\frown}{\bullet}\text{---}, K) &= \pi_*(d\alpha) + (\partial\pi)_*(\alpha) \\ &= (\partial\pi)_*(\alpha) \quad (\pi_*(d\alpha) = 0 \text{ jer je } \text{sym}_{S^2} \text{ zatvorena})\end{aligned}$$

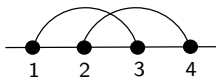
Ovdje je  $(\partial\pi)_*(\alpha)$  integral uz lica  $\text{Conf}[4, \mathbb{R}]$  koje imaju kodimenziju 1.

Ta lica se mogu predstaviti dijagramima na slijedeći način.

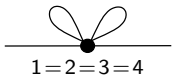
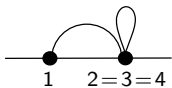
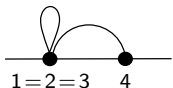
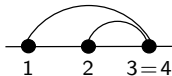
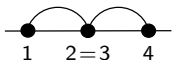
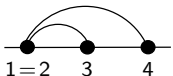


## 6. Integrali prostora konfiguracija

Ako imamo četiri tačke koje se kreću na čvoru i pratimo dva smjera, dijagram koji bilježi te informacije je



Lica kodimenzije 1 (sudari tački) su onda predstavljani dijagramima koji se dobiju od gornjeg kroz kontrakcije segmenta između njih:



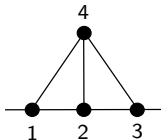
(Omča(?) predstavlja izvod.)

Integrali koji su predstavljeni sa donja tri dijagrama iščeznu, ali ne i za gornja tri.

Način na koji ovo riješiti: Naći neki drugi prostor koji ima ista tri lica i onda oduzeti integrale.

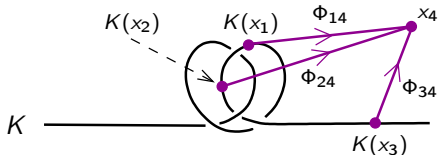
## 6. Integrali prostora konfiguracija

Dijagram koji tražimo je



zato što kontrakcija grana  $4=1$ ,  $4=2$ , i  $4=3$  daje iste tri relevantne slike kao prije.

Ovo sugerira da želimo konfiguracijski prostor sa četiri tačke od kojih su tri na čvoru. Drugim riječima, želimo ovu sliku:



## 6. Integrali prostora konfiguracija

Za preciznu konstrukciju, definiše se svežanj (Bott-Taubes)

$$\pi: \text{Conf}[3, 1; \mathcal{K}^3, \mathbb{R}^3] \longrightarrow \mathcal{K}^3$$

čije je vlakno nad  $K \in \mathcal{K}^3$  konfiguracijski prostor sa četiri tačke od kojih tri moraju ležati na čvoru  $K$ .

Neka

$$\Phi = \Phi_{14} \times \Phi_{24} \times \Phi_{34}: \text{Conf}[3, 1; \mathcal{K}^3, \mathbb{R}^3] \longrightarrow (S^2)^3$$

bude preslikavanje koje daje tri smjera kao na prethodnoj slici.

Dakle relevantna preslikavanja su

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}[3, 1; \mathcal{K}, \mathbb{R}^3] & \xrightarrow{\Phi} & (S^2)^3 \\ \downarrow \pi & & \\ \mathcal{K} & & \end{array}$$

## 6. Integrali prostora konfiguracija

Ako je  $\alpha' = \Phi^*(\text{sym}_{S^2}^3)$ , onda imamo integral ove forme uz vlakno  $\text{Conf}[3, 1; K, \mathbb{R}^3]$  nad  $K$ . Dakle za svaki  $K \in \mathcal{K}^3$ , imamo integral

$$I(\text{triangle}, K) = \pi_*(\alpha') = \int_{\text{Conf}[3, 1; K, \mathbb{R}^3]} \alpha'$$

Može se pokazati da restrikcija integrala na sva lica kodimenzije 1 samo nije trivijalna za ona tri lica koja nas interesuju. Znači imamo

### Theorem (Altschuler-Friedel, Bar-Natan)

*Preslikavanje*

$$\mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$K \longmapsto \left( I(\text{two arcs}, K) - I(\text{triangle}, K) \right)$$

*je invarijanta čvorova, znači element  $H^0(\mathcal{K}^3)$ . Dalje, to je invarijanta konačnog tipa 2 (iste invarijante konačnog tipa o kojima smo ranije govorili).*

Nema razloga da se zaustavimo na četiri tačke...

## 6. Integrali prostora konfiguracija

$\mathcal{TD}_k = \{\mathbb{R}\text{-vektorski prostor generisan } \textit{trivalentnim} \textit{ dijagramima}$   
sa  $2k$  tačke, modulo  $STU$  relacija}.

### Example

$$\mathcal{TD}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{TD}_3 = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \right\}, \text{ itd.}$$

STU relacija dolazi iz geometrije konfiguracijskih prostora:

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array}$$

## 6. Integrali prostora konfiguracija

Ako je dat  $D \in \mathcal{TD}_k$  sa  $p$  tačaka na segmentu i  $q$  koje nisu an segmentu, opet imamo svežanj

$$\text{Conf}[p, q; \mathcal{K}^3, \mathbb{R}^3] \longrightarrow \mathcal{K}^3$$

Takodje imamo preslikavanje

$$\Phi: \text{Conf}[p, q; \mathcal{K}^3, \mathbb{R}^3] \longrightarrow (S^2)^e$$

gdje je

- $\Phi$  proizvod preslikavanja koje daju smjerove između parova tačaka koje odgovaraju linijama (tetivama) u  $D$ , i
- $e$  broj tetiva u  $D$ .

Neka je  $\alpha = \Phi^*(\text{sym}_{S^2}^e)$ .

Onda za svaki  $K \in \mathcal{K}^3$ , imamo integral

$$I(D, K) = \pi_*(\alpha) = \int_{\text{Conf}[p, q; K, \mathbb{R}^3]} \alpha$$

## 6. Integrali prostora konfiguracija

Neka je  $\mathcal{W}_k = \mathcal{TD}_k^*$  (prostor *weight(?) sistema*).

Theorem (Bott-Taubes, D.Thurston)

Za svaki  $W \in \mathcal{W}_k$ , preslikavanje

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ K &\longmapsto \sum_{D \in \mathcal{TD}_k} W(D)I(D, K) \end{aligned}$$

je invarijanta čvorova. Dalje, to je invarijanta konačnog tipa  $k$ . Štaviše, imamo izomorfizam

$$\mathcal{W}_k \xrightarrow[\cong]{\text{integrali prostora konfiguracija}} \{\text{invarijante konačnog tipa } k\} \subset H^0(\mathcal{K}^3).$$

Ovo se zove *Fundamentalni Teorem Invarijanti Konačnog Tipa (ili Vasiljevljevih Invarijanti)*. Prvi ga je dokazao Kontsevich sa svojim slavnim *Kontsevich Integralom*.

Isti integrali se mogu koristiti za konstrukciju kohomoloških klasa prostora  $\mathcal{K}^n$ ,  $n > 3$ , sa odgovarajućom generalizacijom trivalentnih dijagrama.

## 6. Integrali prostora konfiguracija

Vratimo se na kraju nakratko kalkulusu mnogostrukosti. Imali smo

### Teorema (V.)

*Invarijante Taylorove kula za  $\mathcal{K}^3$  su upravo invarijante konačnog tipa. Preciznije, za svaki  $k \geq 0$  postoji izomorfizam (sa  $\mathbb{R}$ -koeficijentima)*

$$H^0(T_{2k}\mathcal{K}^3) \cong \{\text{invarijante konačnog tipa } k\} \subset H^0(\mathcal{K}^3).$$

*(Takođe  $H^0(T_{2k}\mathcal{K}^3) \cong H^0(T_{2k+1}\mathcal{K}^3)$ .)*

Sada možemo dati ideju dokaza – faktorizacija integrala prostora konfiguracija kroz Taylorovu kulu za  $\mathcal{K}^3$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}_k & \xrightarrow[\cong]{\text{integrali prostora konfiguracija}} & \{\text{invarijante konačnog tipa } k\} \subset H^0(\mathcal{K}^3) \\ & \searrow \mathbb{R} & \nearrow \mathbb{R} \\ & H^0(T_{2k}\mathcal{K}^3) \cong H^0(T_{2k+1}\mathcal{K}^3) & \end{array}$$



Hvala na pažnji!