Kalkulus funktora i primjene na prostore ulaganja

Ismar Volić
Wellesley College

Odsjek za matematiku
Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu
26. mart 2015.

Pregled predavanja

1. Kategorije i funktori
2. Ideja kalkulusa funktora
3. Kalkulus mnogostrukosti i prostori ulaganja
4. Primjene na čvorove

1. Kategorije i funktori

Algebarska topologija pokušava da klasifikuje topološke prostore do neke relacije ekvivalencije, kao na primjer

- *homeomorfizam*: Prostori X and Y su homeomorfni ako postoji preslikavanje (neprekidna funkcija) $f: X \to Y$ sa inverznim preslikavanjem; ili
- *homotopnost*: Prostori X and Y su homotopno ekvivalentni ako postoje preslikavanja $f: X \to Y$ and $g: Y \to X$ takva da su $f \circ g$ and $g \circ f$ homotopne identičnom preslikavanju (X se može "deformisati" u Y); ili
- *izotopija*: Isto kao homotopnost, samo X and Y su mnogostrukosti i sva preslikavanja su ulaganja (X se može "deformisati" u Y kroz injektivna preslikavanja); itd.

Cilj je da se pronađu algebarske *invarijante* prostora, dakle želimo dodijeliti svakom prostoru neki algebarski objekt tako da, ako su dva prostora ekvivalentna, njihovi algebarski objekti su izomorfni.

Najosnovnije invariante su:

- $\mathrm{H}_k(X)$, grupe *(singularne) homologije*;
- $\mathrm{H}^k(X)$, grupe *(singularne) kohomologije*;
- $\pi_k(X)$, grupe *homotopije*.

  ($k \geq 0$ u sva tri slučaja)

- Grupe homologije su bazirane na kombinatorici prostora u smislu da kodifikuju strukturu *simpleksa* (generalizacije trougla). Njih je najteže definisati ali ih je najlakše izračunati.
- Grupe kohomologije su dualne homologiji, ali imaju više strukture pa su teže za izračunati.
- Grupe homotopije je lako definisati:

  $$\pi_k(X) = \{\text{prelikavanja } S^k \to X \text{ modulo relacija homotopije}\},$$

  ali su one najteže za izračunati.

(Neke druge verzije singularne (ko)homologije su *simplicijalna homologija*, *celularna homologija*, *deRham kohomologija* (za mnogostrukosti), *Čech (ili pramen) kohomologija* (za mnogostrukosti), itd.)

3. Invarijante algebarske topologije

Primjer (Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$)

$$\mathrm{H}_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{H}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\pi_k(\mathbb{R}^n) = 0 \qquad \forall k$$

Primjer (Sfera S^n)

$$\mathrm{H}_k(S^n) = \mathrm{H}^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, n \\ 0, & k \neq 0, n \end{cases}$$

$$\pi_k(S^n) = \text{generalno nepoznato}$$

S obzirom da je homologija invarijanta homotopije, $\mathbb{R}^n$ i S^n nisu homotopski ekvivalentni (ni homeomorfni).

1. Kategorije i funktori

π_k, H_k, and H^k ne samo da dodjeljuju grupu svakom prostoru X, nego i dodjeljuju homomorfizam grupa svakom preslikavanju između prostora. To nam dozvoljava da prebacimo poređenja prostora (preslikavanja su način na koji se prostori upoređuju) u poređenja grupa.

Konkretnije, imamo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_k(-)"'] & Y \arrow[d, "\pi_k(-)"] \\ \pi_k(X) \arrow[r, "\pi_k(f)"] & \pi_k(Y) \end{tikzcd}$$

Isto za H_k, ali za H^k, donja strelica je preokrenuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{H}^k(-)"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{H}^k(-)"] \\ \mathrm{H}^k(X) & \mathrm{H}^k(Y) \arrow[l, "\mathrm{H}^k(f)"'] \end{tikzcd}$$

Drugačije formulisano: π_k, H_k, and H^k su *funktori* iz *kategorije topoloških prostora* u *kategoriju grupa*.

Preciznije,

Definicija

Kategorija $\mathcal{C}$ se sastoji iz

- kolekcije *objekata* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$; i
- za bilo koja dva objekta X and Y, skup *morfizama* (ili *mapa*, ili *strelica*) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

(Postoji i kompozicija morfizama koja zadovoljave neke očigledne aksiome.)

1. Kategorije i funktori

Primjeri

- Set: $\mathrm{Ob}(\mathsf{Set}) =$ skupovi
  $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}} =$ funkcije

- Top: $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}) =$ topološki prostori
  $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}} =$ preslikavanja

- Grp: $\mathrm{Ob}(\mathsf{Grp}) =$ grupe (ili abelove grupe)
  $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}} =$ homomorfizmi

- Ring: $\mathrm{Ob}(\mathsf{Ring}) =$ prtenovi
  $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ring}} =$ homomorfizmi prstena

- Mfld: $\mathrm{Ob}(\mathsf{Mfld}) =$ (diferencijalne) mnogostrukosti
  $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mfld}} =$ (diferencijabilna) preslikavanja

- Vect/F: $\mathrm{Ob}(\mathsf{Vect/F}) =$ vektorski prostori nad poljem F
  $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Vect/F}} =$ F-linearne funkcije

1. Kategorije i funktori

Preslikavanje između kategorija je *funktor*:

Definicija

Kovarijantni funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ između kategorija $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ se sastoji iz dvije funkcije:

- Na objektima:

$$\begin{aligned} F\colon\ \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \\ X &\longmapsto F(X); \end{aligned}$$

- Na morfizmima: Za svaki par objekata $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} F\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \\ (f\colon X \to Y) &\longmapsto (f(F)\colon F(X) \to F(Y)). \end{aligned}$$

Kontravarijanti funktor je isto, samo preokrece strelicu pa se dobije

$$F(f)\colon F(Y) \to F(X)$$

u $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$.

1. Kategorije i funktori

Primjeri

$$\begin{aligned}
\pi_k, \mathrm{H}_k, \mathrm{H}^k \colon\ \mathsf{Top} &\longrightarrow \mathsf{Grp} \\
X &\longmapsto \pi_k(X), \mathrm{H}_k(X), \mathrm{H}^k(X) \ \ \text{(H}^k\text{ kontravarijantan)} \\
F \colon\ \mathsf{Set} &\longrightarrow \mathsf{Set} \\
S &\longmapsto \mathcal{P}(S), \text{partitivni skup skupa } S \\
F \colon\ \mathsf{Grp} &\longrightarrow \mathsf{Set} \\
G &\longmapsto G, \text{gledan kao skup} \\
F \colon\ \mathsf{Set} &\longrightarrow \mathsf{Grp} \\
S &\longmapsto \mathbb{Z}[S], \text{slobodna grupa nad } S \\
F \colon\ \mathsf{Vect/F} &\longrightarrow \mathsf{Vect/F} \\
V &\longmapsto V^*, \text{dualni vektorski prostor} \ \ \text{(kontravarijantan)}
\end{aligned}$$

(trebalo bi i reći kako ovi funktori preslikavaju morfisme, ali to nije teško)

1. Kategorije i funktori

Razni koncepti se mogu proučavati ili izraziti kao funktori: parcijalno uređeni skupovi, limesi i kolimesi, tenzorski proizvod, (pred)pramenovi, tangentni i kotangentni snopovi, dejstva grupa i reprezentacije, Lijeve algebre, itd.

Generalno, teorija kategorija je korisna na dva načina:

- Ona organizuje i kontekstualizuje informacije da bi se sa njima moglo lakše upravljati;
- Nekada se u apstraktnom okviru kategorija i funktora mogu dokazati generalni rezultati koji se onda daju primjeniti na specifične situacije.

Jedan primjer gdje se ovo dešava je *kalkulus funktora*.

2. Ideja kalkulusa funktora

Kalkulus funktora je teorija koja se bavi aproksimacijom funktora u algebri i topologiji na sličan način na koji Taylorov niz to radi običnim analitičkim funkcijama. Generalno, ako imamo funktor

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ova teorija proizvodi "Taylorovu kulu" funktora i morfizama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & F(-) \arrow[dlll] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & & \\
T_0F(-) & \cdots \arrow[l] & & T_{k-1}F(-) \arrow[ll] & T_kF(-) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & T_\infty F(-) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

- T_kF je *k-ti Taylorov polinom od F*;
- $T_\infty F$ is the inverzni limes kule, dakle "Taylorov niz" od F.

Zavisno of F, ova kula je *konvergentna* što znači da postoji ekvivalencija, za sve $X \in \mathcal{C}$,

$$F(X) \simeq T_\infty F(X).$$

(Riječ "ekvivalencija" zavisi od konteksta.)

2. Ideja kalkulusa funktora

Trenutno postoje tri verzije kalkulusa funktora:

- Homotopski kalkulus
- Ortogonalni kalkulus
- Kalkulus mnogostrukosti

Svaki je dizajniran za proučavanje različitih vrsta funktora:

- Homotopski: $X \mapsto \Sigma^\infty X,\ \Omega^\infty \Sigma^\infty X,\ X$;
- Ortogonalni: $V \mapsto BO(V),\ BU(V),\ S^V, \Omega^V S^V$;
- Mnogostrukosti: $M \mapsto \mathrm{Map}(M,N),\ \mathrm{Imm}(M,N),\ \mathrm{Emb}(M,N)$

Analogije sa Taylorovim nizom su najjasnije u homotopskom kalkulusu gdje je, na primjer, k-ti polinom

$$\left(\partial_k F(*) \wedge X^{\wedge k}\right)_{h\Sigma_k}$$

što odgovara

$$\left(f^{(k)}(0) \cdot x^k\right) \Big/ k!$$

3. Kalkulus mnogostrukosti i prostori ulaganja

Nas interesuje kalkulus mnogostrukosti:

Neka Top bude kategorija topoloških prostora i neka M, N budu glatke mnogostrukosti.

$$\mathcal{O}(M) = \text{kategorija otvorenih podskupova od } M$$
$$\text{sa inkluzijama kao morfizmima.}$$

Kalkulus mnogostrukosti proučava funktore

$$F\colon \mathcal{O}(M)^{op} \longrightarrow \mathrm{Top}$$

Za svaki takav funktor, kalkulus mnogostrukosti dakle daje Taylorovu kulu funktora/prostora T_kF i preslikavanja među njima.

Polinomi T_kF Taylorove kule su generalno definisani na slijedeći način:

3. Kalkulus mnogostrukosti i prostori ulaganja

Neka je $\mathcal{O}_k(-)$ podkategorija $\mathcal{O}(-)$ koja se sastoji od otvorenih podskupova koji su difeomorfni otvorenim razdvojenim loptama, najviše njih k.

Onda, za $U \subset \mathcal{O}(M)$, k-ti Taylorov polinom je

$$T_k F(U) = \operatorname*{holim}_{V \in \mathcal{O}_k(U)} F(V).$$

Ovaj homotopski limes na neki način rekonstruira $F(U)$ od informacija o sistemima otvorenih lopti u U (Kan ekstenzija).

U povoljnim okolnostima, preslikavanje $F(-) \to T_k F(-)$ indukuje izomofizme na grupama homotopije u rasponu koji raste sa k, tako da imamo ekvivalenciju

$$F(-) \xrightarrow{\simeq} T_\infty F(-).$$

(Obično se tada funktor evaluira na M, znači interesuje nas ekvivalencija $F(M) \xrightarrow{\simeq} T_\infty F(M)$.)

Glavni primjer takvog funktora F je *prostor ulaganja*:

Definicija

Neka su M i N glatke mnogostrukosti. *Ulaganje* M u N je injektivno preslikavanje $f\colon M \hookrightarrow N$ čiji izvod je injektivan i koje je homeomorfizam na svoju sliku.

Ako je M kompaktan, onda je ulaganje injektivno preslikavanje sa injektivnim izvodom.

Skup svih ulaganja M u N se može topologizirati tako da dobijemo *prostor ulaganja M u N*, $\mathrm{Emb}(M, N)$ (poseban slučaj *prostora funkcija*).

3. Kalkulus mnogostrukosti i prostori ulaganja

Primjer

- $\mathrm{Emb}(*, N) \cong N$
- $\mathrm{Emb}(\sqcup_m *, N) = \{(x_1, x_2, ..., x_m) \in N^m : x_i \neq x_j \text{ za } i \neq j\} =$ $= \mathrm{Conf}(m, N)=$ prostor konfiguracija m tačaka u N
- $\mathrm{Emb}(D^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathrm{Stiefel}_m(\mathbb{R}^n)$
- $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^3) =$ prostor čvorova

Za mnoge M i N, $\mathrm{Emb}(M, N)$ je komplikovan, ∞-dimenzionalan prostor, ali vrlo interesantan sa topološkog stanovišta. Dakle cilj je da se razumije

$$\pi_*(\mathrm{Emb}(M, N)), \quad \mathrm{H}_*(\mathrm{Emb}(M, N)), \quad \mathrm{H}^*(\mathrm{Emb}(M, N)).$$

Čak je i $\mathrm{H}_0(\mathrm{Emb}(M, N))$, skup povezanih komponenti ulaganja M u N ili skup *klasa izotopije*, obično vrlo komplikovan.

3. Kalkulus mnogostrukosti i prostori ulaganja

$\mathrm{Emb}(M, N)$ je takođe i funktor:

$$\begin{aligned} \mathrm{Emb}(-, N) \colon \mathcal{O}(M)^{op} &\longrightarrow \mathrm{Top} \\ O &\longmapsto \mathrm{Emb}(O, N) \end{aligned}$$

Ovo je kontravarijantni funktor zato što, ako je data inkluzija $O_1 \hookrightarrow O_2$ otvorenih podskupova M, imamo restrikciju

$$\mathrm{Emb}(O_2, N) \longrightarrow \mathrm{Emb}(O_1, N).$$

Kalkulus mnogostrukosti se dakle može primjeniti na funktor $\mathrm{Emb}(-, N)$ i tako dobijemo Taylorovu kulu

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Emb}(-, N) \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & & \\
T_0\, \mathrm{Emb}(-, N) & \cdots \arrow[l] & T_k\, \mathrm{Emb}(-, N) \arrow[l] & T_{k+1}\, \mathrm{Emb}(-, N) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & T_\infty\, \mathrm{Emb}(-, N) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

3. Kalkulus mnogostrukosti i prostori ulaganja

Teorema (Goodwillie-Klein-Weiss)

Taylorova kula za $\mathrm{Emb}(-, N)$ *je konvergentna pod određenim dimenzionalnim uslovima. Naime, za svaki* $O \in \mathcal{O}(M)$*, preslikavanje*

$$\mathrm{Emb}(O, N) \longrightarrow T_\infty \mathrm{Emb}(O, N)$$

indukuje izomorfizme, za sve $k \geq 0$*, grupa*

- π_k, *ako* $dim(M) + 3 \leq dim(N)$,
- H_k *i* H^k, *ako* $4dim(M) \leq dim(N)$.

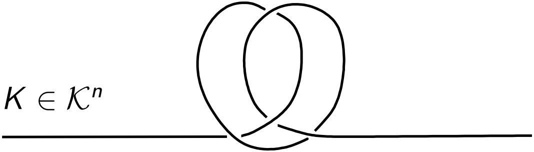
U praksi se obično uzme $O = M$ da bi se dobile informacije o prostoru ulaganja cijele mnogostrukosti (znači funktorijalnost se koristi u dokazu teoreme, ali se onda specijalizuje).

Da vidimo kako se ovo primjenjuje na čvorove i linkove:

4. Primjene na čvorove

$$\mathcal{K}^n = \{\text{ulaganja } \; K : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \text{ linearna van nekog kompaktnog skupa}\}$$
$$= \textit{prostor dugih čvorova}$$

$K \in \mathcal{K}^n$



Kada je $n = 3$, imamo klasičnu teoriju čvorova u kojoj su najbitniji

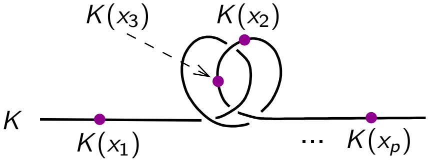
$$\begin{aligned} H_0(\mathcal{K}^3) &= \{\text{povezane komponente prostora čvorova}\} \\ &= \{\text{klase izotopija čvorova}\} \\ H^0(\mathcal{K}^3) &= \{\text{invarijante čvorova}\} = \{f\colon \; H_0(\mathcal{K}^3) \to \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ali i viša (ko)homologija i homotopija su takođe interesantni, čak i za $n > 3$ (iako tada nema učvoravanja; u tom slučaju su $H_0(\mathcal{K}^n)$ i $H^0(\mathcal{K}^n) = 0$ trivijalni).

Nemamo konvergenciju Taylorove kule za $\mathcal{K}^3$, ali ona bez obzira sadrži dosta informacija o čvorovima kao što ćemo uskoro vidjeti.

4. Primjene na čvorove

Konstrukcija $T_k\mathcal{K}^n$: Možemo uzeti "uzorak" čvora $K : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ na p tačaka $x_1, x_2, ..., x_p \in \mathbb{R}$.



Prostor takvih uzoraka je

$$\begin{aligned}\mathrm{Conf}(p, \mathbb{R}^n) &= \{(x_1, x_2, ..., x_p) \in (\mathbb{R}^n)^p : x_i \neq x_j \text{ for } i \neq j\} \\ &= \textit{prostor konfiguracija } p \textit{ tačaka u } \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Uradimo to za sve $1 \leq p \leq k$. Postoje preslikavanja

$$\mathrm{Conf}(p, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathrm{Conf}(p+1, \mathbb{R}^n), \quad 1 \leq p < k.$$

Zajedno, ovi prostori konfiguracija i preslikavanja formiraju "dijagram probušene kocke".

4. Primjene na čvorove

Na primjer, kada je $n = 3$, dobijemo

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Conf}(1,\mathbb{R}^n) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
 & \mathrm{Conf}(1,\mathbb{R}^n) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Conf}(2,\mathbb{R}^n) \arrow[dd] \\
\mathrm{Conf}(1,\mathbb{R}^n) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Conf}(2,\mathbb{R}^n) \arrow[dr] & \\
 & \mathrm{Conf}(2,\mathbb{R}^n) \arrow[rr] & & \mathrm{Conf}(3,\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}
$$

$T_k\mathcal{K}^n =$ homotopski limes (ili homotopsko povlačenje) ovog dijagrama

(Ovo je kao aproksimacija funkcije gdje se uzmu k vrijednosti funkcije i onda se formira interpolacijski polinom.)

Takodje postoje preslikavanja $\mathcal{K}^n \to T_k\mathcal{K}^n$ i $T_k\mathcal{K}^n \to T_{k-1}\mathcal{K}^n$ koja nije teško definisati, i tako dobijemo Taylorovu kulu.

4. Primjene na čvorove

Vratimo se invarijantama:

Ako se čvor moze deformisati (izotopirati) u neki drugi, onda invarijanta $f \in \mathrm{H}^0(\mathcal{K}^3)$ daje istu vrijednost tim čvorovima. Ali ona ne mora dati *različite* vrijednosti neizotopnim čvorovima. Otvoren problem: Da li postoji invarijanta (ili familija invarijanti) koja uvijek daje različite vrijednosti različitim čvorovima? (To bi bio skup *kompletnih invarijanti*.)

Pretpostavka

Skup **invarijanti konačnog tipa** k, $k \geq 0$, *je kompletan.*

Invarijante konačnog tipa je definisao Vasiljev prije 20 godina, i od tada su vrlo popularne:

- Motivisane su fizikom (Chern-Simons Teorija);
- Veze sa Lijevim algebrama, topologijom 3-mnogostrukosti, itd.;
- Imaju kombinatorijanu interpretaciju kroz *dijagrame tetiva* (Kontsevichev Integral).

4. Primjene na čvorove

Teorema (V.)

Taylorova kula za $\mathcal{K}^3$ klasifikuje invarijante konačnog tipa. Preciznije, za svaki $k \geq 0$, postoji izomorfizam

$$\mathrm{H}^0(T_{2k}\mathcal{K}^3) \cong \{\textit{invarijante konačnog tipa } k\} \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{K}^3).$$

(Takodje $\mathrm{H}^0(T_{2k}\mathcal{K}^3) \cong \mathrm{H}^0(T_{2k+1}\mathcal{K}^3)$.)

Dokaz koristi Bott-Taubes integrale prostora konfiguracija.

Ova teorema

- Stavlja teoriju invarijanti konačnog tipa u topološki kontekst (prije ovoga, one su proučavane tehnikama fizike);
- Daje novo objašnjenje za pojavu *dijagrama tetiva* u teoriji invarijanti konačnog tipa kroz kohomologiju prostora konfiguracija (prije su ti dijagrami tretirani kao Feynman dijagrami iz fizike).

4. Primjene na čvorove

Kalkulus mnogostrukosti takođe daje informacije o topologiji prostora $\mathcal{K}^n$, $n > 3$. U ovom slucaju se može primjeniti teorema o konvergenciji Taylorove kule.

Teorema (Lambrechts-Turchin-V.)

Za $n > 3$, (ko)homologija $\mathcal{K}^n$ se može u potpunosti opisati kroz (ko)homologiju prostora konfiguracija tačaka u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz koristi:

- Kalkulus mnogostrukosti;
- Kontsevichevu formalnost operade malih kocki.

(Ko)homologija prostora konfiguracija se može izraziti kroz dijagrame tetiva, tako da dobijemo kombinatorijalni opis $\mathrm{H}^k(\mathcal{K}^n)$ i $\mathrm{H}_k(\mathcal{K}^n)$ za $n > 3$.

Imamo slicne rezultate za *homotopiju* $\mathcal{K}^n$, $n > 3$. Takodje imamo generalizacije na prostore *linkova*.

Hvala na pažnji!